*Acta Cient. Venezolana 32:* 500-502, 1981

# TRAZADO DE RAYOS SISMICOS EN CUENCAS SEDIMENTARIAS

**V. Pereyra**
Escuela de Computación, Fac. de Ciencias, UCV
**J. A. Rial**
Escuela de Geología y Minas, Depto. de Geofísica
Fac. de Ingeniería, UCV
Department of geophysics
University of California, Santa Cruz.

RESUMEN

Se describe un método actualizado para el trazado de rayos sísmicos en medios in homogéneos, linealmente elásticos e isotrópicos. Se considera también el caso en que existen discontinuidades materiales.

*SEISMIC RAY-TRACING IN SEDIMENTARY BASINS*

ABSTRACT

We describe a method for seismic ray-tracing in inhomogeneous, linearly elastic and isotropic media. We also consider the case of material discontinuities.

## INTRODUCCION

El trazado de rayos en medios linealmente elásticos, inhomogéneos e isotrópicos, es una herramienta muy útil en sismologia para diversos estudios sobre propagación de ondas. El caso de cuencas (o microcuencas) sedimentarias, típico de valles aluvionales como el de Caracas, es uno en que toda la generalidad del método es requerida. Están presentes allí inhomogeneidades laterales fuertes, discontinuidades materiales debidas al lecho de rocas, y la geometría es lo suficientemente irregular como para requerir cálculos tridimensionales.

En[5] Pereyra, Lee y Keller han descrito un método numérico para el trazado de rayos entre dos puntos dados en medios bidimensionales completamente inhomogéneos, continuos a trozos, es decir, permitiendo discontinuidades materiales. El método estaba basado en un programa general de resolución de problemas de frontera para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.[2, 4]

En este trabajo describimos el caso tridimensional y damos además una formulación más simple que es apropiada para la resolución por medio de un nuevo programa general, PASVA4, que ha sido diseñado especialmente para este tipo de aplicaciones. Ejemplos prácticos de aplicación se darán en[3] y en Pereyra y Wojcik (en preparación).

## PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS ELASTICOS

Un medio linealmente elástico es capaz de propagar perturbaciones en forma de ondas. Es posible identificar varios tipos de ondas, tanto internas como superficiales. Las ondas internas básicas en sismología en el caso isotrópico son las ondas primarias (P) o de presión y las secundarias (S) o de cizalla (corte).

Estas ondas se propagan en el medio y en cada momento t es posible identificar a los puntos $x = (x,y,z)$ que están siendo afectados por una perturbación que ocurrió en un tiempo anterior $t_0$. El conjunto de estos puntos forma una superficie llamada el *frente de onda* (al tiempo t). Los frentes de onda para tiempos sucesivos vienen caracterizados por las superficies de nivel de la *función de ondas* $\psi(x) =$ cte.

Las trayectorias ortogonales a los frentes de ondas son los *rayos.*

De las ecuaciones de movimiento se puede deducir que el gradiente de $\psi(x)$ satisface la ecuación Eiconal de la óptica geométrica:

$$\nabla \psi(x) \cdot \nabla \psi(x) = c^{-2} \qquad (2.1)$$

donde $c = c_P = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\varsigma}}$ o $c = c_S = \sqrt{\mu / \varsigma}$

son las velocidades de propagación de las ondas P y S respectivamente, que vienen dadas en términos de los parámetros elásticos de Lamé y de la densidad $\varsigma$, todas características del material y que en este caso son funciones de la posición $x$. La notación $u \cdot v$ indica producto escalar de vectores y por lo tanto el vector unitario normal al frente de ondas es

$$\zeta(x) = c(x) \nabla \psi(x)$$

y no es difícil ver que éste se propaga con velocidad c $(x)$.

Si elegimos la longitud de arco s para parametrizar los rayos, resulta que éstos satisfacen el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d}{ds}\left[ u(x) \frac{d\,x(s)}{ds} \right] = \nabla u(x), \qquad (2.2)$$

donde $u(x) = 1/c(x)$ es la *lentitud.*

Hay dos tipos bien diferenciados de aplicaciones de los rayos de las que nos ocuparemos. Ambas presuponen que la estructura, es decir c $(x)$, es conocida.

En la primera de estas aplicaciones se dispara un haz de rayos desde un punto $x_A$ para ver cuál es el efecto de las inhomogeneidades y discontinuidades de la estructura sobre los frentes de ondas. Debido a estas irregularidades se pueden producir enfocamientos, cáusticas, zonas de sombra, difracción, etc., todos fenómenos que interesa detectar, ya que pueden ocasionar considerables distorsiones en las señales que llegan a la superficie.

En el segundo tipo de aplicación se desea modelar la llegada a un punto particular de una señal que ha viajado a través del medio. En este caso tenemos el trazado de rayos entre dos puntos $x_A$, $x_B$.

En el primer caso, el sistema de ecuaciones (2.2) debe resolverse con las condiciones iniciales

$$x(0) = x_A, \quad d\,x(0)/ds = \dot{x}_A \qquad (2.3)$$

donde $\dot{x}_A$ da la dirección inicial del rayo. Este problema se puede resolver con cualquier integrador de ecuaciones diferen-

Recibido: 11/6/81
Aceptado: 17/11/81

ciales para problemas de valores iniciales. Veremos luego que con una pequeña reformulación es posible resolverlo también con PASVA4 con ciertas ventajas.

En el segundo caso (2.2) se debe resolver con las condiciones de frontera

$$x(0) = x_A, \; x(S) = x_B \qquad (2.4)$$

donde S es la longitud total del arco de rayo que une $x_A$ con $x_B$. Obviamente S es también una incógnita del problema. Afortunadamente tenemos también una condición adicional que es necesaria para garantizar que s es en efecto la longitud de arco:

$$\dot{x}(s) \cdot \dot{x}(s) = 1. \qquad (2.5)$$

En[5] se demuestra que con las ecuaciones (2.2) es suficiente con imponer (2.5) para s = 0, ya que esto garantiza que vale para todo s.

## INTERFASES MATERIALES

Cuando el frente de ondas llega a una interfase donde la velocidad c ($x$) tiene un salto discontinuo debido a un cambio brusco de material, se producen ondas reflejadas y transmitidas y pueden haber conversiones de P a S y viceversa. Las direcciones de estos nuevos rayos quedan determinadas mediante una generalización de la ley de Snell de la óptica que procederemos a describir.

Sea $\Gamma$ una superficie que separa a dos medios continuos y supongamos que viene representada en forma implícita como

$$\Gamma : f(x) = 0,$$

donde f es diferenciable. Sea $\eta = \nabla f / \|\nabla f\|$ la normal unitaria a $\Gamma$, con dirección positiva que va del medio I al medio II. Vamos a estudiar un rayo que viaja en el medio I y es incidente en $\Gamma$. Para mayor simplicidad vamos a numerar los diferentes rayos que aparecen: Incidente 0; P-reflejado 1; S-reflejado 2; P-transmitido 3; S-transmitido 4.

Naturalmente asociados con estos rayos están las velocidades $v_v$ y lentitudes respectivas $u_v$.

La ley de Snell generalizada dice que: «Las derivadas de los frentes de ondas en las direcciones de las tangentes a un obstáculo deben ser iguales».

Esto se expresa analíticamente considerando dos vectores $\tau^{(\alpha)}$, $\tau^{(\beta)}$ que generan el plano tangente a $\Gamma$ en el punto de incidencia y pidiendo que

$$\left.\begin{aligned} \nabla \psi^{(v)} \cdot \tau^{(\alpha)} &= \nabla \psi^{o} \cdot \tau^{(\alpha)} \\ \nabla \psi^{(v)} \cdot \tau^{(\beta)} &= \nabla \psi^{o} \cdot \tau^{(\beta)} \end{aligned}\right\} \quad v = 1,2,3,4$$

Se sigue entonces que los vectores $[\nabla \psi^{(v)} - \nabla \psi^{(o)}]$ están en la dirección de la normal $\eta$. Esto se puede expresar diciendo que existen escalares $a_v$ tales que

$$\nabla \psi^{(v)} - \nabla \psi^{(o)} = a_v \, \eta. \qquad (3.1)$$

Multiplicando escalarmente (3.1) por $\eta$ obtenemos

$$\eta \cdot [\nabla \psi^{(v)} - \nabla \psi^{(o)}] = a_v$$

y luego de algunas manipulaciones deducimos que la dirección de los rayos reflejados o transmitidos debe satisfacer la relación

$$\nabla \psi^{(v)} = \nabla \psi^{(o)} + \{\pm \sqrt{u_v^2 - u_o^2 + [\nabla \psi^{(o)} \eta]^2} - [\nabla \psi^{(o)} \eta]\} \, \eta \qquad (3.2)$$

donde el signo + en la raíz corresponde a rayos transmitidos y el – a reflejados.

Estos nos dice, entre otras cosas, que todos los rayos producidos son coplanares al rayo incidente y a la normal a la interfase.

Las relaciones (3.2) junto con el hecho de que el rayo en efecto incide en la interfase, que se expresa requiriendo que

$$f(x) = 0, \qquad (3.3)$$

constituyen las condiciones de interfase que permiten conectar trozos de rayos que tienen dirección discontinua. Para más detalles sobre estos tópicos ver[1].

## CALCULO DE LOS RAYOS

En[3] hemos descrito un método y un programa, PASVA4, para resolver problemas de frontera no-lineales para ecuaciones diferenciales de primer orden, donde se permiten saltos discontinuos, tanto en los datos como en la solución. Además se pueden considerar también parámetros adicionales, junto con sus correspondientes condiciones algebraicas que pueden ser impuestas en puntos interiores al intervalo de integración. En el caso presente necesitamos de toda la generalidad de este programa, como veremos a continuación.

Antes que nada debemos reescribir las ecuaciones (2.2) como un sistema de primer orden. Para ello introducimos las seis nuevas variables dependientes $w = (w_1, w_2, \ldots, w_6)$:

$$w_{2i+1} = x_i, \; w_{2i} = u(x)\, \dot{x}_i, \; i = 1,2,3.$$

Con estas variables obtenemos [usando (2.2)]:

$$\left.\begin{aligned} d\, w_{2i+1} / ds &= d\, x_i / ds = c(x)\, w_{2i} \\ d\, w_{2i} / ds &= d\,[u(x)\, x_i] / ds = \partial u(x) / \partial w_{2i+1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Esta formulación es más simple que la de[5] y fue sugerida por Rob Comer.

Para considerar el caso de rayos en medios discontinuos, definamos a $k \geqslant 1$, como el número de segmentos continuos que tiene el rayo. Esto significa que el rayo tocará (k – 1) interfases en su viaje entre $x_A$ y $x_B$.

Sean $\Gamma_j : f_j(x) = 0, j = 1, \ldots, k-1$ estas interfases y sean $s_j$ los valores de la longitud de arco medida desde $x_A$ hasta los puntos de intersección $x_j$. Todos estos $s_j$ son desconocidos. Para hacerlos aparecer en las ecuaciones y hacer que éstas estén definidas en un intervalo conocido, cambiaremos la variable independiente de tal manera que el intervalo $[s_j + s_{j+1}]$ corresponda al intervalo $[j, j+1]$ (aquí hemos llamado $s_o = 0$, $s_k = S$). Por lo tanto en $[s_j, s_{j+1}]$, $s \rightarrow t = j + (s - s_j) / (s_{j+1} - s_j)$, con lo que las ecuaciones de los rayos quedan finalmente

$$w'_{2i+1}(t) = S_j\, c\,[x(t)]\, w_{2i}(t) \qquad i = 1,2,3$$
$$w'_{2i}(t) = S_j\, \partial u\,[x(t)] / \partial w_{2i+1} \qquad j = 0, \ldots, k-1$$
$$t \in [j, j+1] \qquad (4.2)$$

donde los $S_j$ son parámetros desconocidos a determinar ($S_j \equiv s_{j+1} - s_j$). Las condiciones de frontera para el caso de trazado entre dos puntos son

$$w_{2i+1}(0) = x_{Ai},\ w_{2i+1}(k) = x_{Bi},$$
$$w_2(0)^2 + w_4(0)^2 + w_6(0)^2 = u(0)^2. \qquad (4.3)$$

Ahora observamos que $\| d\, x(s) / ds \| = 1$, por definición de longitud de arco y por lo tanto $(w_{2i})_{i=1,2,3} = dx(x) / ds = \nabla \psi$

En (3.2), $\nabla \psi^{(o)}$ corresponde al rayo incidente, mientras que $\nabla \psi^{(v)}$ corresponde a uno de los posibles rayos reflejados o transmitidos. En cada interfase podemos elegir cuál de estos rayos vamos a continuar trazando.

Por lo tanto, si reemplazamos $\eta$ por $\nabla f_j(x_j) / \| \nabla f_j(x_j) \|$ y calculamos el producto escalar como

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{3} [w_{2i}(j^+) - w_{2i}(j^-)]\, \eta_i(x_j), \qquad j = 1, \ldots, k-1,$$

entonces las condiciones de interfase se escriben:

$$w_{2i+1}(j^+) - w_{2i+1}(j^-) = 0,$$
$$w_{2i}(j^+) - w_{2i}(j^-) - \{ \pm \sqrt{u_v^2 - u_o^2 + \sigma_j^2} - \sigma_j \}\, \eta_i(x_j)\, f_j(x_j) = 0, \qquad (4.4)$$

donde $j^-$, $j^+$ indican respectivamente los límites por la izquierda (incidente) y por la derecha (transmitido). Las primeras tres condiciones requieren que el rayo sea continuo, mientras que las segundas tres especifican cuál debe ser su cambio de dirección al incidir en la interfase.

El programa PASVA4 requiere además las matrices Jacobianas con respecto a $w$ de todas las funciones no lineales que describen el problema (4.2), (4.3) y (4.4). Los elementos distintos de cero del Jacobiano del término de la derecha en (4.2) son

$$J_{2i+1,2+1} = S_j\, c\,[x(t)]$$

$$J_{2i+1,2l+1} = S_j\, \partial c\,[x(t)] / \partial x_l\, w_{2i}(t)$$

$$J_{2i,2l+1} = S_j\, \partial^2 u\,[x(t)] / \partial w_{2i+1}\, \partial w_{2l+1}$$

$$i,l = 1,2,3;\ j = 0, \ldots, k-1;\ t \in [j, j+1]. \qquad (4.5)$$

Para escribir el Jacobiano de (4.4) primero calculamos el de $\eta$:

$$\partial \eta_j(x) / \partial w_{2i-1} = \frac{\partial \nabla f_j / \partial w_{2i-1}}{\| \nabla f_j \|} - \frac{(\nabla f_j \cdot \partial \nabla f_j / \partial w_{2i-1})}{\| \nabla f_j \|^3}\, \nabla f_j \qquad (4.6)$$

y por lo tanto, si reescribimos (3.2) como

$$D \equiv \nabla \psi^{(v)} - \nabla \psi^{(o)} - \{ \pm R - (\nabla \psi^{(o)} \cdot \eta) \}\, \eta$$

donde $R = \sqrt{u_v^2 - u_o^2 + [\nabla \psi^{(o)} \cdot \eta]^2}$, tenemos que

$$\partial D / \partial x^-_{2i-1} = -\{ \pm [-u_o\, \partial u_o / \partial x_{2i-1} + (\nabla \psi^{(o)}, \eta)(\nabla \psi^{(o)}, \partial \eta / \partial x_{2i-1})] / R - (\nabla \psi^{(o)}, \partial \eta / \partial x_{2i-1}) \}\, \eta - \{ \pm R - (\nabla \psi^{(o)}, \eta) \}\, \partial \eta / \partial x_{2i-1} \qquad (4.7a)$$

$$\partial D / \partial x^-_{2i} = -e_i - \{ \pm (\nabla \psi^{(o)}, \eta)\, \eta_i / R - \eta_i \}\, \eta \qquad (4.7b)$$

$$\partial D / \partial x^+_{2i-1} = -\{ \pm u_v\, (\partial u_v / \partial x_{2i-1}) / R \}\, \eta \qquad (4.7c)$$

$$\partial D / \partial x^+_{2i} = e_i \qquad (4.7d)$$

## DISPARANDO RAYOS CON UN RESOLVEDOR DE PROBLEMAS DE FRONTERA

Como indicamos en la Sección 2 el problema de disparar rayos sólo requiere imponer condiciones iniciales y por lo tanto puede ser resuelto mediante programas diseñados con ese propósito. Sin embargo si se desarrolla software para el problema de dos puntos resulta incómodo tener que recurrir a otro programa para disparar rayos. Es posible introducir una opción que permite resolver este problema dentro de nuestro sistema. Para ello se requiere plantear el problema de valores iniciales como uno equivalente de dos puntos.

Daría la impresión que cuando en (2.3) especificamos el punto y la dirección iniciales del rayo no hay nada más que podamos elegir en el extremo final. Sin embargo esto no es así, ya que en este problema no hemos siquiera dicho cuál es el extremo final. Si requerimos que la integración se interrumpa en un momento específico allí es donde aparecerá nuestra condición final. En nuestro caso es pertinente requerir que el rayo se interrumpa cuando llegue a una determinada interfase $f_f$, que puede ser la superficie de la tierra. Así la condición final queda como

$$f_f\,[x(S)] = 0$$

Podemos imponer esta condición ya que S es desconocido.

## REFERENCIAS


1. Keller, H. B.: *Propagation of stress discontinuities in inhomogeneous elastic media.* SIAM Review 6: 356-382, 1964.
2. Lentini, M., y Pereyra, V.: *An adaptative finite difference solver for nonlinear two point boundary problems with mold boundary layers* SIAM J. Numer. Anal. 14: 91-111, 1977.
3. Lentini, M., y Pereyra, V.: *PASVA4: An ordinary boundary solver for problems with discontinuous interfases and algebraic parameters.* Enviado para su publicación a Comm. Mat. Apl. e Comp., Rio de Janeiro, Brazil.
4. Pereyra, V.: *PASVA3: An adaptive finite difference FORTRAN program for first order nonlinear, ordinary boundary problems.* Lecture Notes Comp. Sc. 76: 67-88. Springer-Verlag, Berlín, 1979.
5. Pereyra, V., Lee, W. H. K., y Keller, H. B.: *Solving two-point seismic raytracing problems in an heterogeneous medium. Part 1: A general adaptive finite difference method.* Bull. Sism. Soc. Amer. 70: 79-99, 1980.