De *Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina*
Vol. XIX, p. 349-356. Buenos Aires, 1962

# RELACIONES ENTRE DERIVADAS GENERALIZADAS

por V. PEREYRA (1)

MMARY

We define Riemann derivatives in Cèsaro means of a measurable function and we prove that the existence of finite Riemann-Cèsaro derivative in a measurable set E implies the existence of ordinary Riemann derivative, almost everywhere in E.

An interesting consequence is a generalization of a Khintchine theorem which says that the existence of Schwartz derivative of the indefinite integral of a function $f(x)$ implies the existence of Borel simmetric derivative of $f(x)$.

Marcinkiewicz y Zygmund han probado el siguiente teorema [1]:

Sea $f(x)$ una función de una variable real, definida y medible en un intervalo $(a, b)$, $E$ un conjunto de medida positiva contenido en $(a, b)$ y $k$ un número natural.

Si para cada punto $x$ perteneciente a $E$:

$$\frac{{}^{(s)}\Delta_h^k f(x)}{h^k} \quad 0(1) \quad (h \to 0)$$

entonces existe $pp$ en $E$ la derivada de Peano de orden $k$ de la función $f(x)$.

Será útil recordar algunas definiciones [2].

La diferencia simétrica de orden $k$ de la función $f(x)$ es:

$${}^{(s)}\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f\left(x + \left(i - \frac{k}{2}\right) h\right)$$

(1) Este tema fué sugerido por el Prof. A. Zygmund en su estadía en Bs. As. como experto de la Unesco en el Centro Regional de Matemática para América Latina.

*Definición 1:*

Cuando existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{{}^{(s)}\Delta_h{}^k f(x)}{h^k} = R^k f(x)$$ se le llama derivada de Riemann de orden $k$ de la función $f(x)$. Para $k=1$ coincide con la derivada simétrica y para $k=2$ con la de Schwartz.

*Definición 2:*

Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k\,!}{h^k} \left[ f(x+h) \quad f(x) - f_1(x)\,h \qquad f_{(k-1)}(x) \frac{h^{(k-1)}}{(k-1)\,!} \right] \quad f_{(k)}(x)$$

se le llama derivada de Peano de orden $k$ de la función $f(x)$.

Las funciones $f_{(i)}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$ son arbitrarias, a priori, pero quedan unívocamente definidas por $f_{(k)}(x)$.

*Definición 1'.*

Sea $f(x)$ una función medible. Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r}{h^r} \int_0^h (h \quad u)^{r-} \frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k} du \quad R^{(k)} C^{(r)} f(x) \qquad (r \text{ natural})$$

se le llama derivada de Riemann de orden $k$ en media Cèsaro-r, o abreviadamente: Riemann-Cèsaro-r de orden $k$.

Se trata aquí de probar el siguiente:

*Teorema 1:*

Sea $f(x)$ una función medible y $k$, $r$ dos números naturales. Supongamos que $\frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u=0$.

En casi todo punto en que existe derivada de Riemann-Césaro-r de orden $k$ y es finita, existe derivada ordinaria de Riemann de orden $k$ de $f(x)$ y ambas coinciden; es decir:

$$R^{(k)} C^{(r)} f(x) = R^{(k)} f(x) \qquad (p\,p)$$

*Lema 1:*

Si $A_p = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (k-2j)^p$ $k$ natural, $p$ natural entonces:

$$A_p = 0 \text{ para } p < k$$

$$A_k = (-1)^k 2^k k!$$

*Demostración:*

$$x^{-k}(1-x^2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

Derivando $p$ veces y multiplicando cada vez por $x$:

$$(xD)^p [x^{-k}(1-x^2)^k] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^p (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

y de aquí se obtiene el resultado con $x=1$.

*Lema 2:*

Sea $f(u)$ una función medible y $k$, $r$ dos números naturales. Si $g(u) = \dfrac{f(u)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u=0$ valen las identidades:

$$(1) \quad \int_0^h (h-u)^{r-1} g(u)\,du = (r-1)!\left[\frac{F^{(r)}(h)}{h^k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} \binom{k+i-1}{k-1} i \int_0^h (h-u)^{i-1} \frac{F^{(r)}(u)}{u^{k+1}}\,du\right]$$

$$(2)\quad \int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\,du = (r-1)!\Big[ G^{(r)}(h)\,h^k + $$
$$+ \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{k}{i}\, i \int_0^h (h-u)^{i-1} G^{(r)}(u)\, u^{k-i}\,du \Big]$$

donde $F^{(r)}(h) = \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\,du$ y $G^{(r)}$ similarmente.

*Demostración:*

Basta integrar repetidas veces por partes usando la identidad

$$\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\,du$$
$$= (r-1)\int_0^h (\,.\,.\,(\int_0^{x_1} f(u)\,du)\,d x_1) \ldots d x_{r-1})$$

*Lema 3:*

$$(3)\qquad \lim_{h\to 0} \frac{r}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1}\frac{f(u)}{u^k}\,du$$

$$(4)\qquad \lim_{h\to 0} \frac{r\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}}\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\,du$$

Con las mismas hipótesis del Lema 2, la existencia de uno cualquiera de estos límites implica la existencia del otro y ambos son iguales.

*Demostración:*

Es suficiente considerar el caso en que el límite es cero. Supongamos entonces que el límite (4) es cero. Usando la fórmula (1) del Lema 2 y la hipótesis, se tiene que:

$$\frac{1}{h^r}\int^{h}(h-u)^{r-1}\,g(u)\,du \underset{h\to 0}{\to} 0$$

La recíproca resulta de la fórmula (2).

Con estos elementos se puede pasar a la demostración del Teorema 1. Por hipótesis existe:

$$R^{(k)}\,C^{(r)}\,f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{r}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1}\,\frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k\,f(x)}{u^k}\,du$$

y por el Lema 3:

$$R^{(k)}\,C^{(r)}\,f(x) \quad \lim_{h\to 0}\frac{r\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}}\int_0^h (h-u)^{r-1}\,{}^{(s)}\Delta_u{}^k\,f(x)\,du$$

Llamando $\delta(h)$ a la expresión bajo el signo de lím y operando:

$$\delta(h) = \frac{r\,!\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\left[\left(i-\frac{k}{2}\right)^{-r}F^{(r)}\left(x+\left(i-\frac{k}{2}\right)h\right)-\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{r}\left(i \quad \frac{k}{2}\right)^{-j}F^{(j)}(x)\frac{h^{r-j}}{\overline{r-j}\,!}\right]$$

De aquí en adelante se supone que $k$ es impar [2].

A partir de la expresión de $\delta(h)$ construiremos por cambios en la variable $h$, $(k+r+1)$ fórmulas iguales en el límite.

Reemplazando entonces $h$ por $\frac{2}{k}\left[s-\frac{k+r}{2}\right]h$ para $s$

0, 1 $k+r$, se tiene:

$$\delta_s(h) = \frac{(k+r)\,!}{k\,!\left[\frac{h}{k}(k+r-2s)\right]^{k+r}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}(A-B)$$

---

[2] El caso par tiene un tratamiento similar.

donde:

$$A = \left(i - \frac{k}{2}\right)^{i-r} F^{(r)} \left[ x + \left(s - \frac{k+r}{2}\right)\left(1 - \frac{2i}{k}\right) h \right]$$

$$B = \sum_{j=1}^{r} \left(i - \frac{k}{2}\right)^{-j} \frac{\left[\frac{1}{k}(k+r-2s)\, h\right]^{r-j}}{(r-j)\,!} F^{(j)}(x)$$

Lo que se desea conseguir es una cierta combinación lineal de los $\delta_s(h)$ que converja a un múltiplo de $R^{(k+r)} F^{(r)}(x)$.

Esta combinación lineal es:

$$N(h) = \sum_{j=0}^{k+r} \frac{(-1)^s\, k\,! \left[\frac{1}{k}(k+r-2s)\right]^{k+s} (k/2)^r}{s\,!\,(k+r-s)\,!} \delta_s(h) \tag{5}$$

Invirtiendo el orden de las sumas:

$$N(h) = \frac{(-1)^k \left(-\frac{k}{2}\right)^r}{h^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} \left(A - \left(i - \frac{k}{2}\right)^r B\right)$$

pero por el Lema 1

$$\sum^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} \left(i - \frac{k}{2}\right)^r B = \sum_{j=1}^{r} \frac{F^{(j)}(x) \left[\left(i - \frac{k}{2}\right) h\right]^{r-j}}{(r-j)\,!\, k^{r-j}} \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} (k+r-2s)^{r-j} = 0$$

para cada $0 \leqq i \leqq k$.

Por lo tanto:

$$N(h) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left(1 - \frac{2i}{k}\right)^k \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} \frac{F^{(r)}\left[x + \left(s - \frac{k+r}{2}\right)\left(1 - \frac{2i}{k}\right) h\right]}{\left[\left(1 - \frac{2i}{k}\right) h\right]^{k+r}}$$

Como se ve, la segunda suma tiene como límite para $h$ tendiendo a cero y cualquiera sea $0 \leqq i \leqq k$: $R^{(k+r)} F^{(r)}$ en el punto $x$. De otra manera:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\rightarrow} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left(1 - \frac{2i}{k}\right)^k (R^{(k+r)} F^{(r)}(x))$$

Pero por (5) también:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\rightarrow} \frac{k!\,(-1)^{k+r}}{(k+r)!\,2^r k^k} \sum_{s=0}^{k+r} (k \quad r \quad 2s)^{k+r} \binom{k+r}{s}$$

$$(-1)^{k+r-s} (R^{(k)} C^{(r)} f(x)$$

El Lema 1 afirma que los coeficientes de estas expresiones son iguales, de donde se deduce que existe derivada ordinaria de Riemann de orden $(k+r)$ de la r-ésima integral indefinida de $f(x)$.

Esto implica por el teorema de Marcinkiewicz y Zygmund que existe la derivada de Peano correspondiente, pero por el teorema de derivación de Lebesgue $F^{(r)}(x)$ es $r$ veces derivable y se tiene:

$$D^r (F^{(r)}(x) \quad f(x) \quad (p\,p \text{ en } E)$$

por lo tanto:

$$R^{(k+r)} F^{(r)}(x) \quad P_{(k+r)} F^{(r)}(x) \quad f_{(k)}(x) \quad (p\,p \text{ en } E)$$

y como la existencia de derivada de Peano implica la existencia de derivada de Riemann, esto completa la demostración del Teorema 1.

*Teorema 2:*

Sea $f(x)$ una función integrable en $(a, b)$. Si existe la derivada de Riemann de orden $(k+r)$ de $F^{(r)}(x)$ en un conjunto $E$ de medida positiva, entonces $p\,p$ en $E$ existe la derivada de Riemann-Cèsaro-r de orden $k$ de $f(x)$.

*Demostración:*

Está contenida esencialmente en la del Teorema precedente.

Este Teorema generaliza uno de Khintchine [3] que dice lo mismo para el caso $k=1$, $r=1$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. Zygmund, *Trigonometrics Series.* Cambridge at Univ. Press, 2 Ed. Vol. 2.

[2] J. Marcinkiewicz y A. Zygmund, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.* Fundamenta Mathematicae, 26 (1936).

[3] A. Khintchine, *Recherches sur la structure des functions mesurables.* Fundamenta Mathematicae, 9 (1927).

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Departamento de Matemática